

ՖԻԶԻԿԱ

ՄԱՐՄՆԻ ԲԱԼԻՍՏԻԿ ՇԱՐԺՄԱՆ ԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ԴԻՏԱՐԿՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐՑԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԼԵՌՆԻԿ ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, ՆՈՒՆԵ ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ՀԱՊՀ Կապանի մասնաճյուղ, ՀՀ, Կապան

Էլ. հասցե՝ l.n.petrosyan@mail.ru

ԳԱՐԵԳԻՆ ԷԼՈՅԱՆ

Խ. Արմյանի անվան ՀՊՄՀ, ՀՀ, Երևան

Էլ. հասցե՝ eloyangaregin06@aspu.am

DOI: 10.24234/scientific.v3i50.238

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածը նվիրված է հորիզոնի նկատմամբ անկյան տակ նետված մարմնի շարժման (բալիստիկ շարժման) նկարագրման վեկտորական (երկրաչափական) մեթոդի ուսումնասիրմանը: Ներկայումս գոյություն ունի հորիզոնի նկատմամբ անկյան տակ նետված մարմնի շարժման կինեմատիկայից խնդիրների լուծման երկու մեթոդ՝ կոորդինատային և վեկտորական: Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է վեկտորական մեթոդի զարգացումը տարբեր դժվարության մի շարք ուսանելի խնդիրների օրինակով: Սկզբի համար դիտարկվում են օժանդակ հասկացություններ, բանաձևեր, որից հետո ձևակերպվում են հինգ դիտողություններ արագությունների տրամագրում (դիագրամում) ներկայացված վեկտորական առնչությունների վերաբերյալ, այնուհետև ներկայացվում են թեորեմներ երկրաչափությունից, որոնք կիրառվում են դիտարկվող խնդիրները լուծելիս: Դիտարկվում են տարբեր դժվարության խնդիրներ և դրանց երկրաչափական լուծումներ: Հոդվածի վերջում ամփոփվում է առաջարկվող մեթոդի նշանակությունը և կատարվում համապատասխան եզրակացություն:

Բանալի բառեր՝ բալիստիկ շարժում, երկրաչափական մեթոդ, կոորդինատային մեթոդ, հավասարաչափ արագացող շարժում, արագությունների եռանկյուն, թռիչքի առավելագույն բարձրություն, թռիչքի հասողություն:

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում դիտարկվող մեխանիկական շարժման տեսակներից համեմատաբար ավելի շատ տեղ է տրված մարմնի հավասարաչափ արագացող շարժմանը, որի տարատեսակներից է **բալիստիկ շարժումը** կամ շարժումը Երկրի ծանրության ուժի ազդեցության տակ:

Շատ հաճախ հարկ է լինում գործ ունենալ մարմնի շարժման հետ, որը սկզբնական արագություն ստացել է ոչ թե ծանրության ուժին զուգահեռ, այլ նրա կամ հորիզոնի նկատմամբ, որոշակի անկյան տակ: Այդպիսի մարմնի մասին ասում են, որ այն նետված է հորիզոնի նկատմամբ անկյան տակ:

Հորիզոնի նկատմամբ անկյան տակ նետված մարմնի շարժման ուսումնասիրությունը ներկայացված է ավագ դպրոցի դասընթացում (Էազարյան, Է., Kirakosyan, A., Melikyan, G., et al.; Myakishev, G. Ya., Bukhovtsev, B. B., & Sotskiy, N. N.) և մի շարք ձեռնարկներում (Butikov, E. I., & Kondrat'yev, A. S.; Yavorskiy, B. M., & Pinskiy, A. A.): Սակայն դասագրքերում և ձեռնարկներում այդ շարժումը հիմնականում դիտարկվում է հանրահաշվական կամ, այսպես կոչված, կոորդինատական եղանակով: Որոշակի դրվագներ հատկացված են երկրաչափական (վեկտորական) դիտարկմանը (Էազարյան, Է., Kirakosyan, A., Melikyan, G., et al.), սակայն այն շատ համառոտ է, իսկ այդ եղանակը գրեթե չի օտագործվում դասընթացի ծրագրային խնդիրները լուծելիս:

Նշված բացի լրացմանն է միտված սույն հոդվածը, որտեղ ավելի մանրամասն ներկայացված են բալիստիկ շարժման երկրաչափական նկարագրման որոշ կարևոր գաղափարներ և մի շարք հետաքրքիր և գրավիչ տարբեր դժվարության խնդիրների լուծումներ, որոնք ոչ միայն կհարստացնեն սովորողների գիտելիքները և պատկերացումները մարմնի շարժման այս տեսակի վերաբերյալ, այլ նաև էականորեն կխթանեն նրանց հետաքրքրությունը «Ֆիզիկա» առարկայի նկատմամբ, ինչը ներկայումս համարվում է բնագիտական կրթության կարևորագույն խնդիրներից մեկը:

ՄԵԹՈԴԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

Դպրոցական ֆիզիկան, չնայած առաջին հայացքից թվացող իր հնամենությանը, իրականում **դինամիկ զարգացող բնագավառ է**, որտեղ մշտապես ի հայտ են գալիս նոր գաղափարներ, մեթոդներ և համապատասխանաբար դրանց կիրառության վրա հիմնված խնդիրներ: Ընդհանրապես կինեմատիկայի, մասնավորապես նաև ներկա հոդվածում դիտարկվող բալիստիկ խնդիրների լուծման առաջարկվող մեթոդը կիրառման տեսանկյունից բավականին պարզ է և ոչ միայն հարստացնում է սովորողների մեթոդական զինանոցը, այլ նաև էապես բարձրացնում է նրանց մրցունակությունը տարբեր մրցույթներում և օլիմպիադաներում, քանզի թույլ է տալիս առաջարկված խնդիրը լուծել ոչ թե երկար բանաձևերով՝ երկու-երեք էջով, այլ շատ ավելի պատկերավոր ու կարճ՝ մի քանի տողով:

Խնդիրը նրանում է, որ ներկայումս ֆիզիկայի բոլոր բաժիններում ընդունված է համարվում վեկտորական հավասարումների լուծման **կոորդինատական եղանակը**: Շատ ֆիզիկական խնդիրներ, որոնց լուծումներում առկա են վեկտորական հավասարումներ, գրեթե անուշադրության է մատնված այդ հավասարումների լուծման երկրաչափական մեթոդը:

Երկրաչափական մեթոդի օգտագործումը ենթադրում է սովորողների գիտելիքների հարուստ բազա վեկտորների, նրանց հատկությունների և վեկտորների հետ կատարվող գործողությունների վերաբերյալ, ինչը թույլ կտա երկրաչափական մեթոդի նպատակային կիրառումը՝ շարժման, առաջին հերթին՝ բալիստիկ շարժման խնդիրներում:

Երկրաչափական մեթոդը շատ դեպքերում անհրաժեշտ է լինում կիրառել բալիստիկայի վերաբերյալ մի շարք ինքնատիպ, այդ այդ թվում էքստրեմալ, խնդիրներում, ուստի հոդվածում դիտարկվում են նաև այդ տիպի խնդիրներ:

ՔՆՆԱՐԿՈՒՄ

Համառոտ տեսական դիտարկում հայտնի հասկացությունների մասին

Միջին արագության $\langle \vec{v} \rangle$ վեկտորի տակ կհասկանանք t ժամանակում կատարած $\vec{S}$ տեղափոխության և ժամանակի այդ միջակայքի հարաբերությունը. $\langle \vec{v} \rangle = \vec{S}/t$:

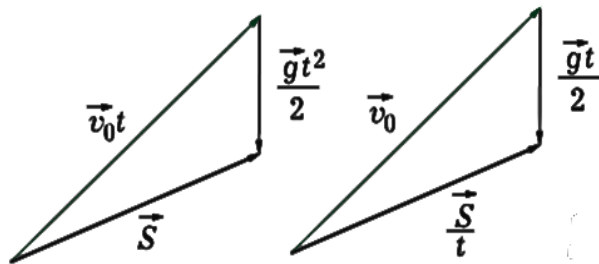
Բալիստիկ հավասարաչափ արագացող շարժման ժամանակ $\vec{S}$ տեղափոխության, սկզբնական $\vec{v}_0$ արագության, $\vec{g}$ հաստատուն արագացման և շարժման t ժամանակի միջև տեղի ունի հետևյալ առնչությունը.

$$\vec{S} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2} : \quad (1)$$

Հավասարման երկու մասերը t -ի վրա բաժանելով՝ կստանանք՝

$$\frac{\vec{S}}{t} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{g} t}{2} : \quad (2)$$

(1) և (2) հավասարումների վեկտորական տրամագրերը ներկայացված են նկ. 1-ում:



Նկ. 1

Մարմնի շարժման $\vec{v}_0$ սկզբնական, $\vec{v}$ վերջնական արագությունների և t ժամանակի կապը հետևյալն է՝

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t : \quad (3)$$

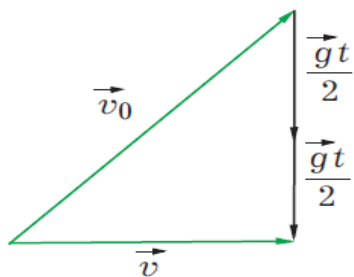
Այս հավասարման վեկտորական տրամագիրը պատկերված է նկ. 2-ում:

(2) և (3) առնչություններից հետևում է միջին արագությունը՝

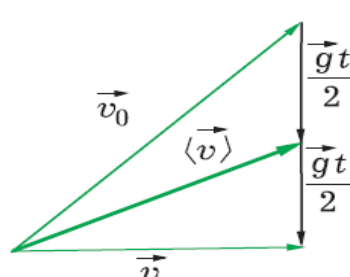
$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{S}}{t} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2} : \quad (4)$$

Նկ. 1-ի և նկ. 2-ի վեկտորական տրամագրերի համեմատությունից հետևում է, որ *միջին արագությունն արագությունների եռանկյան մեջ հանդիսանում ցիկլոմին տարված միջնագիծը* (նկ. 3): Այս փաստը ապացուցվում է նաև թեորեմի տեսքով (Kononov, A. A.):

Համադրելով բոլոր վեկտորական եռանկյունները՝ նկատում ենք, որ երբ նկարագրվում է մարմնի շարժումը, ապա տեղեկատվությամբ *արագությունների*



Նկ. 2



Նկ. 3

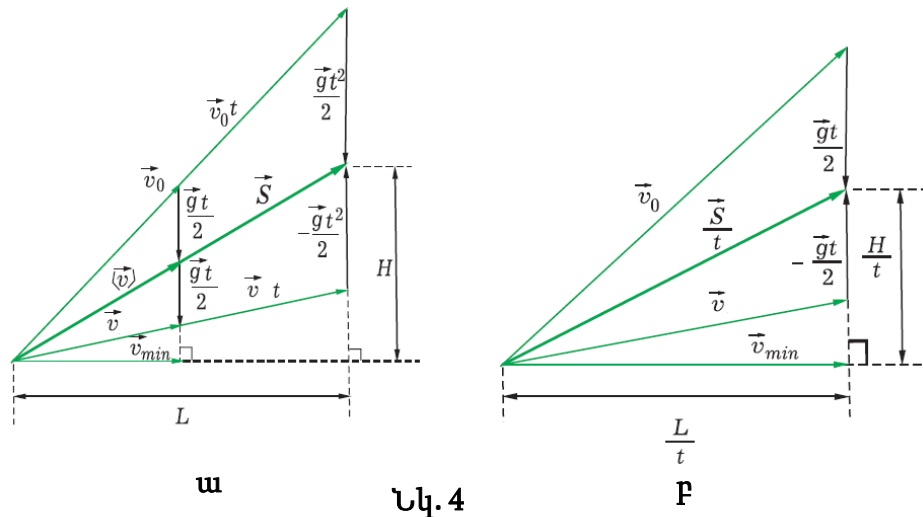
տրամագիրը ոչնչով չի զիջում տեղափոխությունների տրամագրին, իսկ, ինչպես կտեսնենք հետագա շարադրանքում, գերազանցում է նրան: Մեկ մարմնի շարժման

առաջիկա դիտարկվող բոլոր խնդիրները կլուծենք՝ օգտագործելով միայն արագությունների տրամագիրը, ուստի անհրաժեշտ է մի փոքր ավելի մանրամասն առարկայական խոսել նրա մասին:

Մի քանի դիտողություններ արագությունների տրամագրում ներկայացված

վեկտորական առնչությունների վերաբերյալ

Նկար 4 (ա, բ)-ում մանրամասն ներկայացված են մեկ մարմնի բալիստիկ շարժման տեղափոխությունների և արագության երկրաչափական (վեկտորական) տրամագրերը, որոք թույլ են տալիս կատարելու հետևյալ դիտողությունները:



Դիտողություն 1: Մարմնի շարժման $\vec{v}_{\min}$ նվազագույն արագությունը ուղղահայաց է $\vec{g}$ ազատ անկման արագացմանը:

Դիտողություն 2: Ժամանակի տվյալ պահին վերելքի $\vec{H}$ բարձրությունը ընդհանուր դեպքում կարող է լինել բացասական մեծություն, այդ դեպքում H -ը պետք է հաշվարկել հորիզոնից՝ $\vec{g}$ -ի երկայնքով:

Դիտողություն 3: Նկարից (4բ) երևում է, որ (2) հավասարմանը զուգահեռ կարելի է օգտվել նաև

$$\frac{\vec{S}}{t} = \vec{v} - \frac{\vec{g}t}{2} \quad (5)$$

հավասարությունից, որը երբեմն շատ ավելի հարմար է:

Դիտողություն 4: Մարմնի սկզբնական v_0 և H բարձրության վրա վերջնական v արագությունը միմյանց հետ կապված են վերելքի H բարձրությամբ հետևյալ բանաձևով՝

$$v^2 = v_0^2 - 2gH : \quad (6)$$

Այս բանաձևը հարկ է հիշել: Այն ապացուցելու համար բավական է դիտարկել H/t ընդհանուր էջով երկու ուղղանկյուն եռանկյուններ (նկ. 4 բ): Համաձայն Պյութագորասի թեորեմի՝ դիտարկվող եռանկյուններից կարող ենք գրել՝

$$\left(\frac{L}{t}\right)^2 = \nu_0^2 - \left(\frac{H}{t} + \frac{gt}{2}\right)^2, \quad (7)$$

$$\left(\frac{L}{t}\right)^2 = \nu^2 - \left(\frac{H}{t} - \frac{gt}{2}\right)^2: \quad (8)$$

(7) և (8) բանաձևերից ստանում ենք՝

$$\nu_0^2 - \left(\frac{H}{t} + \frac{gt}{2}\right)^2 = \nu^2 - \left(\frac{H}{t} - \frac{gt}{2}\right)^2, \quad (9)$$

որտեղից բացելով փակագծերը՝ ստանում ենք (6) բանաձևը:

Դիտողություն 5: Օգտվելով նկ. 4 բ -ից՝ կարելի է ցույց տալ, որ $\vec{\nu}_0$ սկզբնական արագության, $\langle \vec{\nu} \rangle$ միջին արագության և $\vec{g}t/2$ վեկտորներով կազմված արագությունների եռանկյան մակերեսը՝

$$S_{\Delta} = \frac{1}{4} Lg: \quad (10)$$

Եռանկյան մակերեսը գտնելու համար այս դեպքում հարմար է օգտվել հետևյալ բանաձևից՝

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \beta, \quad (11)$$

որտեղ a -ն և b -ն եռանկյան կողմերն են, իսկ β -ն՝ նրանց կազմած անկյունը: Այս դեպքում որպես եռանկյան կողմեր կվերցնենք $\vec{\nu}_0$ և $\vec{g}t/2$ վեկտորների մոդուլները, իսկ որպես β անկյուն՝ նրանցով կազմած անկյունը: Նկ. 4 բ-ից երևում է, որ

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \nu_0 \frac{gt}{2} \sin \beta = \frac{1}{2} \nu_0 \frac{gt}{2} \cos(90^\circ - \beta) = \frac{1}{2} \nu_0 \frac{gt}{2} \cos \alpha, \quad (12)$$

որտեղ α -ն մեծ ուղղանկյուն եռանկյան մեջ $\vec{\nu}_0$ -ի և $\vec{\nu}_{\min}$ -ի (կամ, որ նույնն է՝ H/t -ի) կազմած անկյունն է: Հաշվի առնելով, որ $\cos \alpha = L/\nu_0 t$, և այս արտահայտությունը (12)-ի մեջ տեղադրելով՝ ստանում ենք՝

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \nu_0 \frac{gt}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2} \nu_0 \frac{gt}{2} \frac{L}{\nu_0 t} = \frac{1}{4} Lg, \quad (13)$$

այսինքն՝ պահանջվող (10) արտահայտությունը:

Երեք կարևոր թեորեմներ եռանկյան մակերեսների մասին

Առաջարկվող թեորեմների ապացույցները առկա են համապատասխան ուսումնական դասագրքերում և ձեռնարկներում, ուստի դրանք կներկայացնենք առանց ապացույցների:

Թեորեմ 1: Եթե երկու հավասարամեծ եռանկյուններ ունեն միատեսակ անկյուն և այդ անկյան դիմացի հավասար կողմեր, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:

Թեորեմ 2: Եթե տրված է եռանկյան անկյունը և այդ անկյան դիմացի կողմը, ապա եռանկյան առավելագույն մակերեսը լինում է *հավասարասրուն եռանկյան* դեպքում:

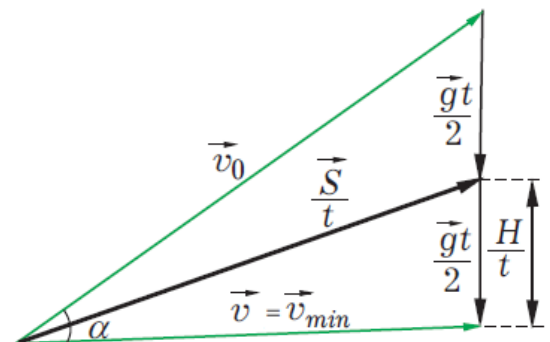
Թեորեմ 3: Եթե տված են եռանկյան մակերեսը և անկյունը, ապա այդ անկյան դիմացի կողմը հասնում է նվազագույնի *հավասարասրուն եռանկյան* դեպքում:

Երկրաչափական լուծմներով խնդիրների օրինակներ

Խնդիր I. Մարմինը $\vec{v}_0$ սկզբնական արագությամբ նետված է հորիզոնի նկատմամբ α անկյան տակ: Գտնել թռիչքի առավելագույն բարձրությունը, հասողությունը (առավելագույն հեռավորությունը) և թռիչքի տևողությունը:

Լուծում: 1. Նախ նկարենք արագությունների տրամագիծը այն դեպքի համար, երբ մարմինը հասել է իր առավելագույն՝ H բարձրությանը (նկ. 5):

ա) Ժամանակի այդ պահին մարմնի արագությունն ուղղված է հորիզոնական, այսինքն՝ ուղղահայաց $\vec{g}t_1$ -ին (t_1 -ը վերելքի ժամանակն է): Այդ դեպքում՝



Նկ. 5

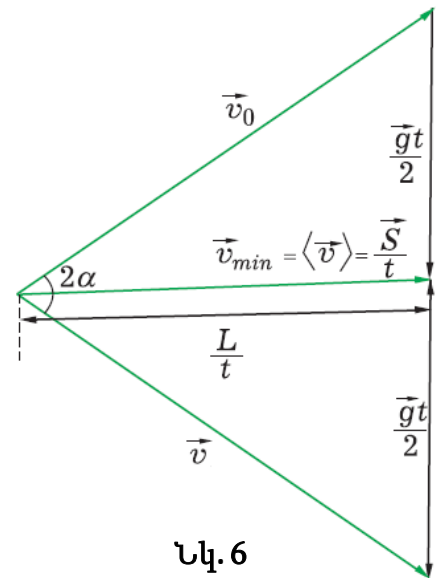
$$v_0 \sin \alpha = gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} : \quad (14)$$

բ) Նկ. 6-ի ներքևի եռանկյունուց տեսանելի է, որ

$$\frac{H}{t_1} = \frac{gt_1}{2} \Rightarrow H = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} : \quad (15)$$

գ) Ղիտողություն 4-ի հաշվառմամբ $v = v_{\min} = v_0 \cos \alpha$ -ը տեղադրելով (6) հավասարման մեջ՝ կստանանք՝

$$v_0^2 \cos^2 \alpha = v_0^2 - 2gH \Rightarrow H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} : \quad (16)$$



դ) Արագությունների եռանկյունուց (նկ. 5) կարող ենք գրել՝

$$v_0 \sin \alpha = 2 \frac{H}{t_1} :$$

(17)

Մյուս կողմից՝

$$v_0 \sin \alpha = gt_1 : \quad (18)$$

Բազմապատկելով (17) և (18) հավասարումները՝ կստանանք՝

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} : \quad (19)$$

2. Նկ. 6-ում տեղափոխությունը և հետևաբար միջին արագությունը ուղղված են հորիզոնական, այսինքն՝ միջին արագությունը, որն արագությունների եռանկյունում (նկ. 5) միջնագիծ է, այստեղ հանդիսանում է բարձրություն, ուստի արագությունների նկ. 6-ի եռանկյունը հավասարակողմ է։ Այդ պատճառով $v = v_0$, նետման անկյունը հավասար է վայրեջքի անկյանը, և հետևաբար, արագությունների եռանկյան մակերեսը մի կողմից հաշվարկվում է որպես երկու կողմերի և նրանցով կազմած անկյան սինուսի արտադրյալի կես՝ $S_{\Delta} = \frac{1}{2} v_0^2 \sin 2\alpha$, իսկ մյուս կողմից՝ համաձայն ղիտողություն 5-ի՝

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} Lg$ ։ Վերջին երկու հավասարումներից ստանում ենք մարմնի թռիչքի հաստողությունը՝

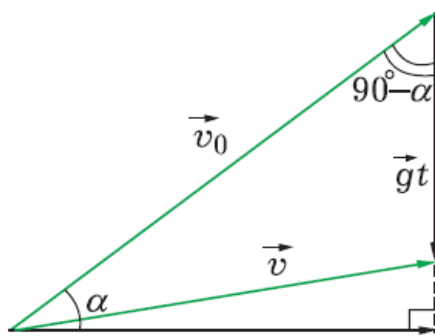
$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} : \quad (20)$$

Արագությունների եռանկյունուց (նկ.6) կորոշենք նաև թռիչքի լրիվ ժամանակը.

$$v_0 \sin \alpha = \frac{gt}{2} \Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2t_1 : \quad (21)$$

Խնդիր II. Անկյան տակ նետված մարմնի սկզբնական արագությունը հավասար է v_0 , իսկ t ժամանակ անց նրա արագությունը կազմում է v : Ինչպիսի $H_{\max}$ առավելագույն բարձրության է բարձրանում այդ մարմինը:

Լուծում: Նկարենք արագությունների եռանկյունը t ժամանակի համար (նկ. 7):



Նկ.7

Կիրառենք կոսինուսների թեորեմն այդ եռանկյան համար.

$$v^2 = v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \cos(90^\circ - \alpha) : \quad (22)$$

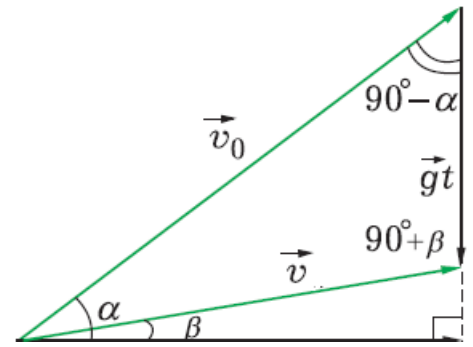
Հաշվի առնելով, որ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, (22)-ից ստանում ենք՝

$$\sin \alpha = \frac{v_0^2 + g^2 t^2 - v^2}{2v_0 g t} \quad (23)$$

Սինուսի (23) արտահայտությունը տեղադրելով նախորդ խնդրում ստացված առավելագույն բարձրության (19) բանաձևում՝ միանգամից ստանում ենք խնդրի պատասխանը.

$$H_{\max} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2 - v^2)^2}{8g^3 t^2} : \quad (24)$$

Խնդիր III. Մարմինը $\vec{v}_0$ սկզբնական արագությամբ նետված է հորիզոնի նկատմամբ α անկյան տակ: Որքա՞ն t ժամանակ հետո այն կշարժվի հորիզոնի նկատմամբ β անկյան տակ: Այդ ժամանակ ինչի՞ հավասար կլինի նրա արագությունը: Շփումը բացակայում է:



Նկ. 8

Լուծում: Նկարենք արագությունների եռանկյունը ժամանակի այն պահի համար, երբ մարմնի արագությունը ուղղված է դեպի վեր՝ հորիզոնի նկատմամբ β անկյան տակ (նկ. 8):

Կիրառելով սինուսների թեորեմը տված եռանկյան համար, կունենանք՝

$$\frac{gt}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{v_0}{\sin(90^\circ + \beta)},$$

$$\frac{v_0}{\sin(90^\circ + \beta)} = \frac{v_k}{\sin(90^\circ - \alpha)}:$$
(25)

Հաշվի առնելով, որ $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, իսկ $\sin(90^\circ + \beta) = \cos \beta$, (25)-ի առաջին հավասարումից անմիջապես գտնում ենք վերելք կատարելիս այն $t_{\uparrow}$ ժամանակը, որից հետո մարմնի արագությունը հորիզոնի նկատմամբ ուղղված է β անկյան տակ, կլինի՝

$$t_{\uparrow} = \frac{v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta},$$
(26)

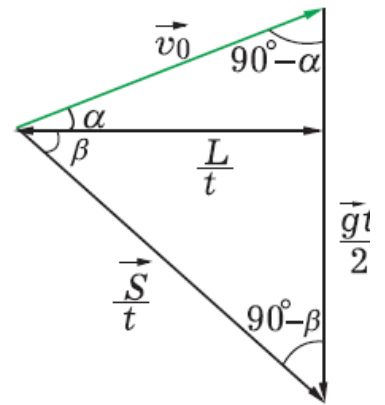
(25)-ի երկրորդ հավասարումից գտնում ենք v վերջնական արագությունը՝

$$v = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos \beta}:$$
(27)

Ժամանակի համապատասխան պահին, երբ մարմնի արագությունը հորիզոնի նկատմամբ β անկյան տակ ուղղված է դեպի ներքև, պատասխանների երկրորդ զույգը գտնելու համար բավական է պարզապես բոլոր բանաձևերում β անկյունը փոխարինել $-\beta$ անկյամբ: Ակնհայտ է, որ մարմնի պարաբոլային հետագծի համաչափության պատճառով այս դեպքում արագությունը չպետք է փոխվի, իսկ ժամանակը պետք է աճի.

$$t_{\uparrow} = \frac{v_0 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \beta}:$$
(28)

Խնդիր IV. Քարը, հորիզոնի նկատմամբ α անկյան տակ, նետում են սարի զազաթից, որի թեքությունը հորիզոնի հետ կազմում է β անկյուն: Ինչպիսի՞ v_0 արագությամբ պետք է նետել քարը, որպեսզի այն ընկնի թեքության վրա, զազաթից S հեռավորությամբ:



Նկ. 9

Լուծում: Նկարենք արագությունների եռանկյունը քարի թեքության վրա ընկնելու պահին (նկ. 9) և երկու տարբեր բանաձևերով հաշվենք նրա մակերեսը:

1) Առաջին դեպքում օգտվենք դիտողություն 4-ում գրված արագությունների եռանկյան մակերեսի (13) բանաձևից, համաձայն որի՝ $S_{\Delta} = (1/4)Lg$: Արագությունների եռանկյունուց երևում է $L = S \cos \beta$: Այս երկու բանաձևերից ստանում ենք՝

$$S_{\Delta} = \frac{1}{4} S g \cos \beta: \quad (29)$$

2) Երկրորդ դեպքում կօգտվենք եռանկյան մակերեսի հայտնի (11) բանաձևից: Արագությունների եռանկյան նկ. 10-ից S_{Δ} -ի համար կունենանք՝

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} v_0 \frac{S}{t} \sin(\alpha + \beta): \quad (30)$$

Այժմ կիրառելով սինուսների թեորեմը արագությունների եռանկյան նկատմամբ, կարող ենք գրել՝

$$\frac{S/t}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{v_0}{\sin(90^\circ - \beta)}, \quad (31)$$

որտեղից ստանում ենք՝

$$\frac{S}{t} = \frac{v_0 \sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \beta)}: \quad (32)$$

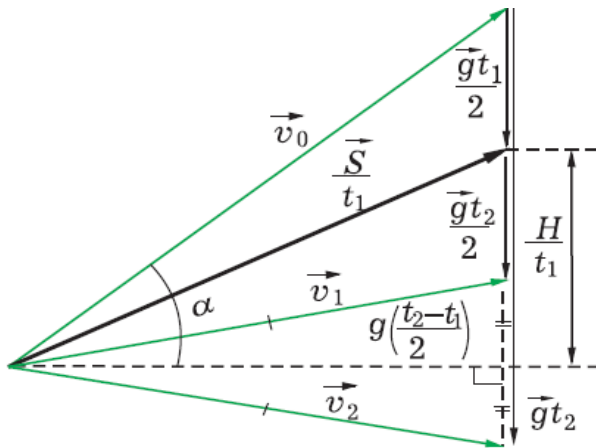
Ստացված արտահայտությունը տեղադրելով (30)-ի մեջ արագությունների եռանկյան մակերեսի համար՝ կստանանք՝

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \beta)}: \quad (33)$$

Հավասարեցնելով (29)-ի և (33)-ի աջ մասերը և հաշվի առնելով, որ $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ և $\sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$, v_0 արագության համար վերջնականապես ստանում ենք՝

$$v_0 = \sqrt{\frac{Sg}{2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha}} \cos \beta : \quad (34)$$

V. Հորիզոնի նկատմամբ α անկյան տակ նետված մարմինը երկու անգամ գտնվել է միևնույն բարձրության վրա, ժամանակի t_1 և t_2 պահերին: Որոշել այդ H բարձրությունը և մարմնի սկզբնական արագությունը:



Նկ. 10

Լուծում: Քանի ամրագրված է (ֆիքսված է) H բարձրությունը, նշանակում է ամրագրված է և մարմնի արագությունը տվյալ բարձրության վրա. $v_1 = v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2gH}$: Պատկերենք արագությունների միասնական տրամագիծը t_1 և t_2 պահերի համար (նկ. 10):

Նկատենք, որ v_1 և v_2

արագություններով կազմված եռանկյունը $g(t_2 - t_1)$ հիմքով հավասարասրուն եռանկյուն է, որից անմիջապես հետևում է երկու երկրաչափական ակնհայտ առնչություններ.

$$\begin{aligned} \frac{H}{t_1} &= g \left(\frac{t_2 - t_1}{2} \right) + \frac{gt_1}{2}, \\ v_0 \sin \alpha &= g \left(\frac{t_2 - t_1}{2} \right) + gt_1 : \end{aligned} \quad (35)$$

(35)-ի առաջին հավասարումը գրելիս հաշվի է առնվել, որ $gt_2/2 = gt_2/2$: Գրված հավասարումներից անմիջապես հետևում է, որ

$$H = \frac{gt_2 t_1}{2}, \quad v_0 = \frac{g(t_2 + t_1)}{2 \sin \alpha} : \quad (36)$$

VI. Քարը v_0 սկզբնական արագությամբ նետում են H բարձրության վրա գտնվող սենյակի պատուհանից: Հորիզոնի նկատմամբ ի՞նչ անկյան տակ պետք է նետել քարը,

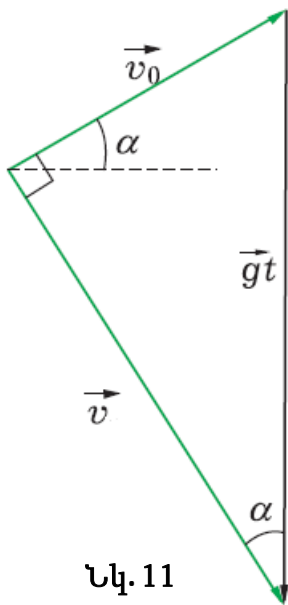
որպեսզի այն ընկնի պատուհանից որքան հնարավոր է հեռու: Հորիզոնական ուղղությամբ ինչպիսի՞ առավելագույն ($L_{\max}$) հեռավորությամբ այն կհեռանա պատուհանից:

Լուծում: Քանի որ մեզ հայտնի են բարձրությունը և սկզբնական արագության մոդուլը, ապա միարժեքորեն տված է վերջնական արագության մոդուլը.

$$v^2 = v_0^2 + 2gH : \quad (37)$$

Այս դեպքում արագությունների եռանկյունն ունի նկ. 11-ում պատկերված տեսքը, որի մակերեսը, ըստ դիտողություն 5-ի, հավասար է՝ $S_{\Delta} = (1/4)Lg$: Մյուս կողմից այդ մակերեսը կարելի է հաշվել որպես արագությունների և նրանց կազմած անկյան սինուսի արտադրյալի կես, ուստի կարող ենք գրել՝

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} v v_0 \sin \vartheta = \frac{1}{2} Lg : \quad (38)$$



Նկ. 11

Քանի որ քարի արագությունները ֆիքսված են, միակը, որը ազդում է մակերեսի վրա, արագությունների միջև անկյան սինուսն է: Ակնհայտ է, որ թռիչքի առավելագույն հեռավորություն ստանում ենք սինուսի առավելագույնի դեպքում, այսինքն՝ տրված արագությունների ուղղահայացության դեպքում ($\vartheta = 90^\circ$) .

$$\frac{1}{2} v v_0 \sin 90^\circ = \frac{1}{2} L_{\max} g : \quad (39)$$

(39)-ից թռիչքի առավելագույն հեռավորության համար ստանում ենք՝

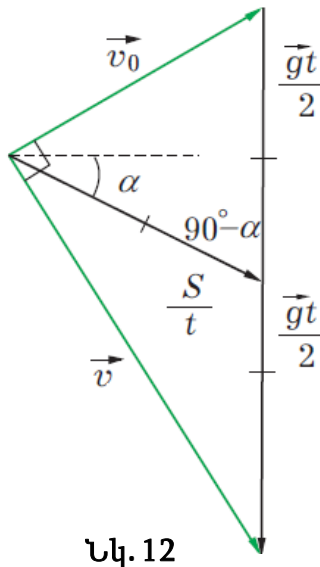
$$L_{\max} = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g} , \quad (41)$$

իսկ արագությունների եռանկյունուց նետման անկյան համար ստացվում է՝

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}} : \quad (42)$$

VII. Սարի թեքությունը հորիզոնի հետ կազմում է α անկյուն: Թեքության երկայնքով առավելագույնը ի՞նչ հեռավորությամբ կարելի է նետել քարը, եթե նրա սկզբնական

արագությունը հավասար է v_0 : Ինչպիսի՞ անկյան տակ պետք է նետել քարը: Որքա՞ն ժամանակ կտևի քարի թռիչքը:



Լուծում: Այս խնդրում տրված է տեղափոխության ուղղությունը, հետևաբար տրված է տեղափոխության և ազատ անկման արագացման միջև կազմած $(90^\circ - \alpha)$ անկյունը, ինչպես նաև այդ անկյան դիմացի v_0 կողմը (նկ. 12):

Քանի որ վերևի տրված եռանկյան միարժեքորեն որոշվում է թռիչքի հեռահասությամբ՝ $S_\Delta = (1/4)Lg$ (**դիտողություն 5**), ապա թռիչքի առավելագույն հեռավորությունը համապատասխանում է այս եռանկյան առավելագույն մակերեսին: Իսկ ըստ **թեորեմ 2**-ի՝ եթե եռանկյան մեջ տրված է անկյունը և նրա դիմացի կողմը, ապա առավելագույն մակերեսը

ստացվում է հավասարապես եռանկյան դեպքում: Այդ պատճառով նետման անկյունը հեշտ է որոշել, եթե հաշվի առնվի, որ հավասարապես եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են և եռանկյան անկյունների գումարը հավասար է 180° : Հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են՝

$$\frac{180^\circ - (90^\circ - \alpha)}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}, \quad (43)$$

հետևաբար նետման անկյունը կլինի՝

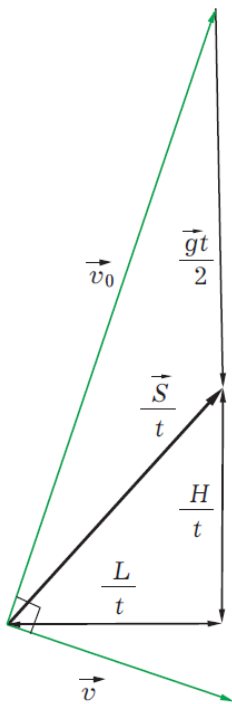
$$\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}: \quad (44)$$

Հայտնի է, որ եթե եռանկյան մեջ միջնագիծը հավասար է այդ կողմի կեսին, որի վրա տարված է, ապա այդ եռանկյուն ուղղանկյուն եռանկյուն է: Այդ պատճառով եռանկյան ներքնաձիգը մի կողմից հավասար է՝ $c = 2(S/t)$, իսկ մյուս կողմից՝ $c = gt$: Այս երկու հավասարումները բազմապատկելով՝ գտնում ենք ներքնաձիգի քառակուսին՝ $c^2 = 2Sg$: Ներքնաձիգի քառակուսին կարելի է գտնել նաև՝ կիրառելով Պյութագորասի թեորեմը.

$$c^2 = v_0^2 + v^2 = v_0^2 + (v_0^2 + 2gH) = v_0^2 + (v_0^2 + 2gS \sin \alpha) = 2Sg: \quad (45)$$

Այս հավասարումից գտնում ենք, որ տեղափոխությունը՝

$$S = \frac{v_0^2}{g(1 - \sin \alpha)} : \quad (46)$$



Նկ. 13

Թռիչքի ժամանակը գտնելու համար, եւ մեկ անգամ պետք է հաշվի առնել, որ ուղղանկյուն եռանկյան մեջ ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը հավասար է ներքնաձիգի կեսին՝

$$\frac{S}{t} = \frac{gt}{2} : \quad (47)$$

Հետևաբար թռիչքի ժամանակի համար ստանում ենք՝

$$t = \sqrt{\frac{2S}{g}} = \frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{2}{1 - \sin \alpha}} : \quad (48)$$

Պատասխաններ՝ $S_{\max} = \frac{v_0^2}{g(1 - \sin \alpha)}$,

նեոման անկյունը հավասար է՝ $45^\circ - \frac{\alpha}{2}$,

թռիչքի ժամանակը՝ $t = \frac{v_0}{g} \sqrt{\frac{2}{1 - \sin \alpha}}$:

VIII. Ինչպիսի՞նն է այն նվազագույն արագությունը, որի դեպքում կարելի է խոցել L հեռավորությամբ H բարձրության վրա գտնվող նշանակետը: Ինչ՞ անկյան տակ պետք է կրակել այս դեպքում:

Լուծում: Ինչպես և նախորդ խնդրում, տրված է տեղափոխության ուղղությունը, հետևաբար տրված է անկյունը տեղափոխության և ազատ անկման միջև, ինչպես նաև տրված է նկ. 13 -ում պատկերված վերնի եռանկյան $S_A = (1/4)Lg$ մակերեսը: Համաձայն **թեորեմ 3**-ի՝ եռանկյան մեջ դիտավոր անկյան հակադիր նվազագույն կողմը լինում է այն դեպքում, երբ եռանկյունը հավասարասրուն է, այսինքն՝ $S/t = gt/2$: Այս հավասարուից հետևում է, որ թռիչքի ժամանակի քառակուսին՝ $t^2 = 2S/g$:

Գրենք Պյութագորասի թեորեմը v_0 ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյան համար (նկ. 13).

$$\nu_0^2 = \left(\frac{L}{t}\right)^2 + \left(\frac{H}{t} + \frac{gt}{2}\right)^2 = \left(\frac{L}{t}\right)^2 + \left(\frac{H}{t} + \frac{S}{t}\right)^2 = \frac{L^2 + H^2 + 2HS + S^2}{t^2} : \quad (49)$$

Հաշվի առնելով, որ $L^2 + H^2 = S^2$ և տեղադրելով t^2 -ու արտահայտությունը կունենանք՝

$$\nu_0^2 = \frac{S^2 + 2SH + S^2}{\frac{2S}{g}} = \frac{2S(S+H)g}{2S} = (S+H)g , \quad (50)$$

կամ՝

$$\nu_0^2 = \left(\sqrt{L^2 + H^2} + H\right)g : \quad (51)$$

Գտնենք նետման անկյան տանգենսը: Քանի որ $gt/2 = S/t$, հետևաբար՝

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{gt}{2} + \frac{H}{t}}{\frac{L}{t}} = \frac{\frac{S}{t} + \frac{H}{t}}{\frac{L}{t}} = \frac{S+H}{L} : \quad (52)$$

$$\textbf{Պատասխան՝ } \nu_0^2 = \left(\sqrt{L^2 + H^2} + H\right)g , \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{S+H}{L}\right) :$$

Վերջում հարկ էնք համարում նշել, որ կինեմատիկան ֆիզիկայի միակ բաժինը չէ, որտեղ օգտագործվում են վեկտորական հավասարումները, և սույն հոդվածը կարող է հանդիսանալ ֆիզիկական խնդիրների լուծման վեկտորաերկրաչափական մոտեցման սկիզբ:

Սովորողները պետք է հստակ ընկալեն այն փաստի կարևորությունը, որ մի շարք ֆիզիկական մեծություններ և օրինաչափություններ և դրանք ներառող կառուցումներ ունեն վեկտորական բնույթ: Իսկ դրա յուրացման լավագույն միջոց է անել զրված վեկտորական հավասարման համապատասխան գծագիրը: Դրանից հետո մնում է միայն ուշադիր նայել ստացված նկարը և վերլուծել այն:

Սույն հոդվածում կարևոր տեղ է զբաղեցնում մեխանիկական շարժման մի մասնավոր դեպքի՝ հաստատուն ուժի դաշտում մարմնի շարժման հետազոտումը: Դրանք դիտողություններում ներկայացված 5 փաստերն են, որոնցից կարևորագույնը այն է, որ սկզբնական $\vec{v}_0$ արագության, միջին $\langle \vec{v} \rangle$ և $\vec{g}t/2$ վեկտորներով կազմված արագությունների եռանկյան մակերեսը հավասար է՝ $S_{\Delta} = (1/4)Lg$: Հատկապես այդ նորություն է թույլ տալիս էականորեն բազմազանեցնել խնդիրների լուծման մաթեմատիկական եղանակները, որը և ցուցադրվեց վերը շարադրանքում:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Ներկայումս, ֆիզիկայի բոլոր բաժիններում համընդունված է համարվում վեկտորական հավասարումների լուծման կոորդինատային մեթոդը: Դեռ ավելին, այդպիսի խնդիրների լուծման երկրաչափական մեթոդները գործնականում անհետացել են ուսուցիչների մեթոդական խնայատուփից, այն դեպքում, երբ շատ խնդիրներ երկրաչափորեն լուծվում են բավականին արագ, պատկերավոր, և **առաջացնում են հիացմունք** ոչ միայն սովորողների, այլ նաև ուսուցիչների մոտ:

Նույալեւ անհրաժեշտ է նշել սովորողների համար խնդիրների տարբեր եղանակներով լուծման կարողությունների կարևորությունը, քանի որ հատակապես այդ կարողություններն են նպաստում նրանց ստեղծագործական ներուժի զարգացմանը:

Անհրաժեշտ է մշակել և ուսումնական գործընթացում գործողության մեջ դնել վեկտորական հավասարումներ պարունակող ֆիզիկական խնդիրների դիտարկման արդյունավետ մեթոդական մոտեցումներ՝ հիմնված այդ հավասարումների լուծման երկրաչափական եղանակի վրա: Այդպիսի մոտեցումները իրենց տրամաբանությամբ, խնդիրների լուծման նրբագեղությամբ սովորողների մեջ կարող են առաջացնել մոտիվացիա (շարժառիթ) ֆիզիկայի նկատմամբ, որը շատ կարևոր հանգամանք է նրանց հատազգա ուսման և մասնագիտական կարողությունների ձևավորման համար:

REFERENCE LIST

- Łazaryan, Ė., Kirakosyan, A., Melikyan, G., & others.** (2010). Fizika-10: Avag dproci 10-rd dasarani dasagirq'yndhanur yev bnagitamatematakan hoskeri hamar (*Physics-10: Textbook for Grade 10 of High School for General and Natural-Mathematical Streams*). Yerevan: Edit Print.
- Myakishev, G. Ya., Bukhovtsev, B. B., & Sotskiy, N. N.** (2014). Fizika. 10 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovatel'nykh organizatsiy: bazovyy uroven' (*Physics. Grade 10: Textbook for General Education Institutions: Basic Level*). In N. A. Parfent'eva (Ed.). Moscow: Prosveshchenie.

- Butikov, E. I., & Kondrat'yev, A. S. (2004). Fizika: uchebnoe posobie v 3 knigakh. Kniga 1. Mekhanika (*Physics: Study Guide in 3 Volumes. Vol. 1. Mechanics*). Moscow: Fizmatlit.
- Yavorskiy, B. M., & Pinskiy, A. A. (2003). Osnovy fiziki. Uchebnik v 2 tomakh. T. 1. Mekhanika. Molekulyarnaya fizika. Elektrodinamika (*Fundamentals of Physics. Textbook in 2 Volumes. Vol. 1. Mechanics. Molecular Physics. Electrodynamics*). (5th ed.). Moscow: Fizmatlit.
- Konovalov, A. A. Geometriya v fizike: konspekt vebinara 1 (*Geometry in Physics: Summary of Webinar 1*). Retrieved from <https://easy-physic.ru/kinematika>

РЕЗЮМЕ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАССМОТРЕНИЯ БАЛИСТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Лерник Петросян, Нуне Мовсисян, Гарегин Элоян

Статья посвящена исследованию векторного (геометрического) метода описания движения тела, брошенного под углом к горизонту (баллистического движения). В настоящее время существуют два метода решения задач по кинематике движения тела, брошенного под углом к горизонту: координатный и векторный. В настоящей работе рассматривается развитие векторного метода на примере ряда учебных задач различной сложности. Сначала рассматриваются вспомогательные понятия, формулы, после чего формулируются пять замечаний по векторным связям, представленным на диаграмме скоростей, затем приводятся теоремы из геометрии, которые используются при решении рассматриваемых задач. Рассматриваются задачи различной сложности и их геометрические решения. В конце статьи обобщается значение предлагаемого метода и делается соответствующее заключение.

Ключевые слова: баллистическое движение, геометрический метод, метод координат, равноускоренное движение, треугольник скоростей, максимальная высота полета, дальность полета.

SUMMARY
ON SOME ISSUES OF GEOMETRIC CONSIDERATION OF BALLISTIC
MOTION OF A BODY

Lernik Petrosyan, Nune Movsisyan, Garegin Eloyan

The article is devoted to the study of the vector (geometric) method for describing the motion of a body thrown at an angle to the horizon (ballistic motion). Currently, there are two methods for solving tasks on the kinematics motion of a body thrown at an angle to the horizon: coordinate and vector. This work considers the development of the vector method on the example of a number of learning tasks of varying complexity. First, auxiliary notions and formulas are considered, after which five remarks on vector relationships are formulated, presented in the velocity diagram, then theorems on geometry are given, which are used in solving the tasks under this consideration. Tasks of varying complexity and their geometric solutions are considered. At the end of the article, the significance of the proposed method is summarized and an appropriate conclusion is made.

Key words: *ballistic motion, geometric method, coordinate method, uniformly accelerated motion, velocity triangle, maximum flight altitude, flight range.*

Հոդվածը ստացվել է՝ 05.10. 2025

Հոդվածն ուղարկվել է գրախոսման՝ 09.10. 2025

Հոդվածը երաշխավորվել է տպագրության՝ 10.11.2025